В курсе ММФ решается множество задач, в массе которых легко запутаться. Давайте попытаемся их систематизировать.

Прежде всего задачи делятся на два типа:
В начально-краевых задачах участвуют и координаты, и время.
В краевых – только координаты.

В первой половине курса ММФ мы будем заниматься только краевыми задачами. На самой первой лекции Боголюбов разбирает одну начально-краевую задачу (т.е. с участием времени), но чисто с иллюстративной целью. С такой же целью ваш семинарист посвятит несколько ближайших семинаров постановкам начально-краевых задач (но не решению), после чего перейдёт на 1,5 месяца только к краевым задачам.

Краевая задача по ММФ состоит из двух компонент: дифура и граничных условий. Это как хлеб и масло. И то, и то бывает несколько типов.

Дифуры бывают:
Уравнение Лапласа:

$$\triangle u = 0$$

Уравнение Пуассона:

$$\triangle u = f$$

Уравнение на СФ (я его ещё буду называть λ-уравнением).

$$\triangle u + \lambda u = 0$$

Уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u + \lambda u = f$$

Самое общее из них – уравнение Гельмгольца. Два его частных случая – уравнение Пуассона и т.н. уравнение на СФ или λ-уравнение
А уравнение Лапласа – это частный случай и уравнения на СФ, и уравнения Пуассона.

В первой части курса ММФ будут только два уравнения:
Простое уравнение Лапласа

$$\triangle u = 0$$

И λ-уравнение или уравнение на СФ

$$\triangle u + \lambda u = 0$$

Последнее, очевидно, является более общим случаем простого уравнения Лапласа.

Итак, мы посмотрели, какие у нас будут дифуры. Это хлеб, который бывает белым и чёрным. Теперь то, что лежит сверху на хлебе – граничные условия. Граничные условия классифицируем на однородные и неодородные. Это как масло и маргарин.

Однородные краевые условия – это когда
u на границе = 0 (однородное условие 1-го рода)
Производная u по какой-то обобщённой координате = 0 (однородное условие 2-го рода)
Линейная комбинация u и её производной = 0 (однородное условие 3 рода)

Неоднородные краевые условия – это когда
u на границе = f(обобщённые координаты) (неоднородное условие 1-го рода)
Производная u по какой-то обобщённой координате = f(обобщённые координаты) (неоднородное условие 2-го рода)
Линейная комбинация u и её производной = f(обобщённые координаты) (неоднородное условие 3 рода)

Таким образом, и для дифура, и для краевых условий у нас есть два варианта, простой и сложный. Получаем четыре задачи по ММФ для одной и той же области:
(не четыре, а больше, т.к. граничные условия могут быть 1-го, 2-го или даже 3-го рода, но если об этом пока не распространяться):
1) самая простая задача: уравнение Лапласа + однородные краевые условия
2) λ-уравнение + однородные краевые условия
3) уравнение Лапласа + неоднородные краевые условия
4) самая сложная задача: λ-уравнение + неоднородные краевые условия

Задача 1 является частным случаем задач 2 и 3, а задачи 2 и 3 – частными случаями задачи 4.

В основном мы будем решать задачи 2 и 3. Почему? Задача 1 выглядит просто и симпатично, но, как правило, её решением будет лишь u=тождественный нуль, поэтому её решать неинтересно. Собственно, суть задачи 2 – поиск таких λ, при которых однородный дифур имеет нетривиальное решение. Если λ=0 будет такой, тогда и только тогда задача 1, которая является частным случаем задачи 2, будет иметь нетривиальное решение. Задача 2 – это задача ***с параметром***, а задача 3 – тупо решение дифура.
Ну а задача 4 сложная зараза, и чтобы пойти на босса, нам нужно сначала потренироваться на двух его заместителях – задачах 2 и 3.
Задачи 2 и 3 для одной и той же области имеют достаточно разное решение, что очень часто вызывает путаницу! Поэтому когда ваш семер говорит «решим задачу в какой-то области», обязательно обратите внимание на то, какую задачу он решает. 95%, что он решает задачу 2 или 3, а какую именно

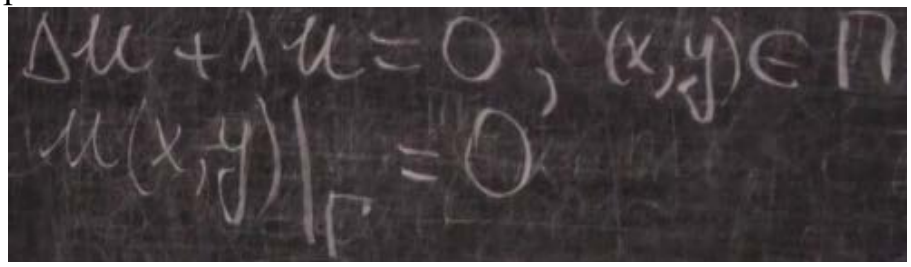
из них – смотрите. Путаницы добавляет тот факт, что некоторые семинаристы решают задачи 2 и 3 вперемешку, некоторые начинают с задач 3, лишь потом решая задачи 2 (Колыбасова), некоторые начинают с задач 2, лишь потом решая задачи 3 (Буткарёв).
Весь семинарский курс в сентябре и октябре вы будете решать задачи 2 и 3. Это несложно (по сравнению с лекциями), но невыносимо скучно. На лекциях будет сложнее, но интереснее: там вы будете новые функции проходить.

Задача 2 частенько называется ***задачей на СФ области***, искомые λ, при которых существует нетривиальное решение – СЗ области. Недаром λ-уравнение я назвал уравнением на СФ. Так что если встретите в чьём-то конспекте запись «ищем СФ круга» - это автор решает задачу 2.
Ну а задачи с неоднородными граничными условиями, к коим относится задача 3, называются ***краевыми задачами.*** Довольно неудачное название, потому что все задачи ММФ содержат краевые условия, я бы их назвал ***краевыми задачами с неоднородными краевыми условиями.***

В курсе дифуров, где всё было одномерно, мы привыкли, что самое главное – решить дифур, а краевые условия так – фигня, тупо подставим им потом в решение и определим в константы.
Совершенно иначе дело обстоит в ММФ, где измерений больше, чем одно. Во-первых, вид границ определяет систему координат, в которой мы будем работать. Если у нас круг, то успешно решив дифур в декартовых координатах, мы не сможем подставить граничные условия. Вот так вот.
Для каких-то границ удобна декартовая система координат, для каких-то цилиндрическая, для каких-то сферическая. Возможно, у вас возник вопрос – а что делать, если граница и вовсе какая-то бесформенная клякса?
Для уравнения Гельмгольца в такой кляксе изобрели свой метод, с функцией Грина. Это – вторая половина семестра.

Данная методичка посвящена тем областям, где мы будем решать в декартовой системе координат. Это прямоугольник и параллелепипед (кирпич).

Начнём с задачи 2. Итак, у нас прямоугольник. Г – граница. Для начала рассмотрим случай с граничными условиями Дирихле. Тогда u на границе равна 0.



Дельта – оператор Лапласа. Он выглядит вот так вот

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Будем искать решения в виде X(x)Y(y) – вместо одной функции двух переменных будет две функции, но одной переменной.
Подставляем, делим на X(x)Y(y).

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0 \quad \Big| \times \frac{1}{X(x)Y(y)}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0$$

Второе и третье слагаемое от икса не зависят. Значит, и не зависит первое – оно константа. Обозначим её за –μ. Тогда

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \ x \in (0;a) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

Это мы уже решали! Сразу выписываем ответ:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{a}, \quad \mu = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

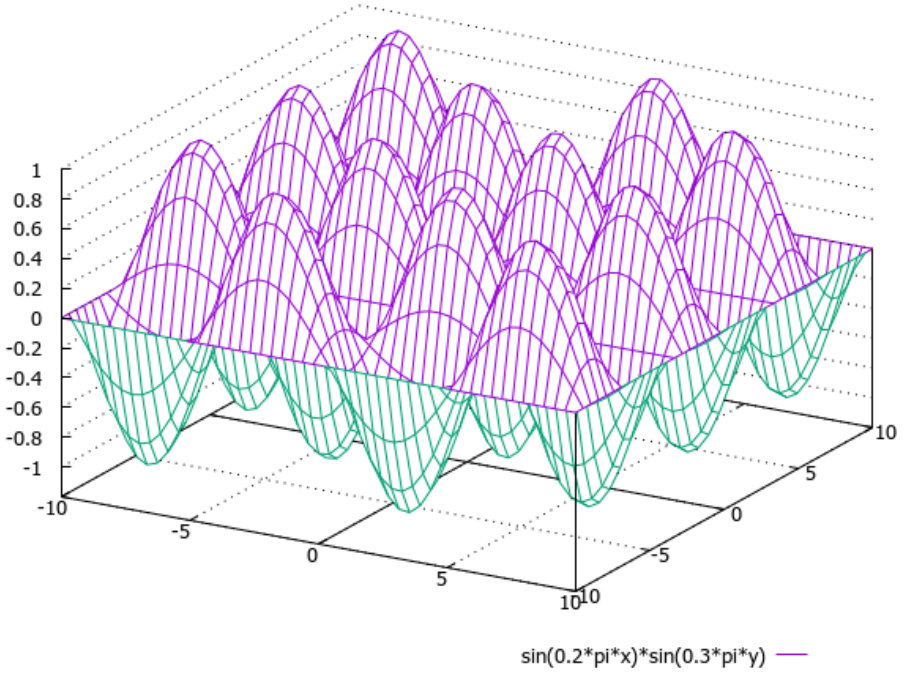
Аналогично

$$Y_m(y) = \sin\frac{\pi m y}{b}, \quad \nu = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Итак, мы получили набор функций $X_n()$ и $Y_m()$, где каждая функция имеет натуральный номер.
Перемножим, получим u(x,y) с уже двумя целочисленными параметрами:

$$u_{nm}(x,y) = \sin\frac{\pi n x}{a}\,\sin\frac{\pi m y}{b}$$

Где n – число полупериодов синусоиды вдоль оси абсцисс, а m – число полупериодов синусоиды вдоль оси ординат.



-

иллюстрация для l=10, n=2, m=3 (программа рисует график в области от (-10, -10) до (10; 10), но нам нужна лишь четверть - от (0;0), до (10;10), на остальное внимания не обращайте).

Получившаяся поверхность похожа на коробку из-под яиц.

Для каждой u_{nm}(,) стоит также найти λ – СЗ.

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$$

Если для одномерного случая у нас счётное число СЗ λ_n с одним индексом, то теперь у нас уже два индекса. Для трёхмерного случая будет три индекса, как вы понимаете.

Замечу, что СЗ и СФ не по отдельности, а вместе. Т.е. мы выбираем три индекса, считаем лямбду, и дифуру именно с такой лямбдой будет удовлетворять u именно с такими индексами m,n.

Совершенно аналогично решается задача для прямоугольного параллепипеда (в простонародии - кирпича). Выпишем только ответ:

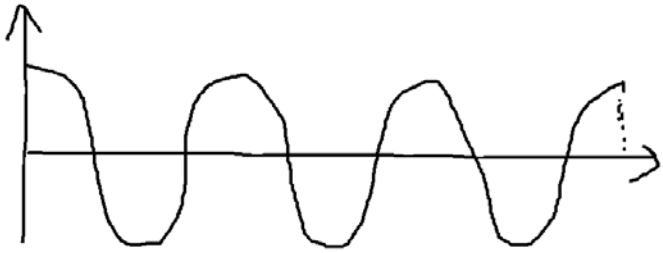
$$u_{nmk}(x,y,z) = \sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b}\sin\frac{\pi k z}{c}$$

А СЗ

$$\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2$$

Кстати, а что делать, если на границе условия не Дирихле, а, например, Неймана?

Если на обеих границах условие 2 рода, то 0 до a (или b, или c) должно по-прежнему укладываться целое число периодов



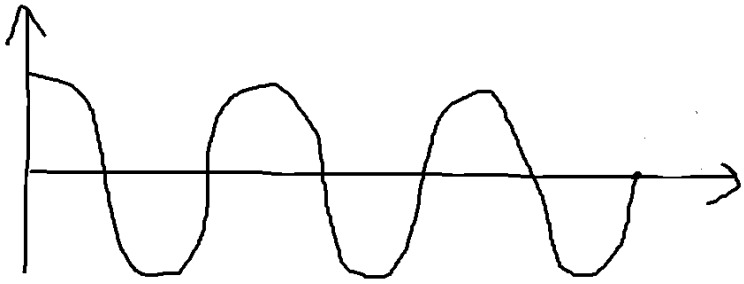
, просто вместо синуса будет косинус.

Будет и ещё одно отличие: для СФ

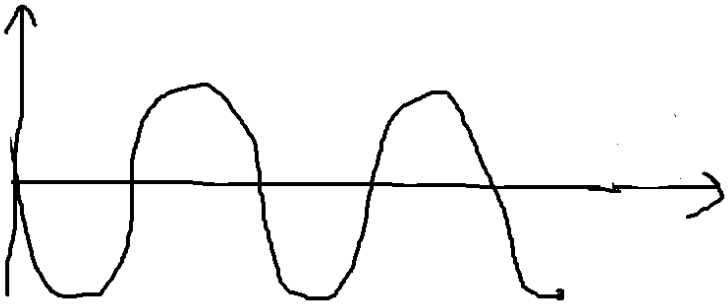
$$cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right), n \in N \cup \{0\}$$

нам будет годиться значение n=0. Если мы n=0 подставим в синус, то получим тождественный нуль, такое нам не интересно. А косинусу норм, будет ненулевая константа.

А если с одной стороны условие 1 рода, а с другой 2 рода? Потребуется уже полуцелое число периодов



Или



Вот тут уже, помимо того, что эта полуцелость отразится в СФ

$$u_n = cos\left(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})x}{a}\right), n \in N$$

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})x}{a}\right), n \in N$$

Она отразится и в СЗ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{a}\right)^2$$

Замечание. Некоторые семинаристы вместо n-1/2 ставят n+1/2, но зато счёт n начинают с 0. Результат тот же.

А если ГУ третьего рода? СФ и СЗ также будут, просто они могут явно не выражаться, а через корни трансцендентного уравнения. Вот, например, пример из Колыбасовой:

Пример 1 (смешанные ГУ). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < l, \\ y(0) = 0, \ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$

В силу приведённой выше теоремы все СЗ *положительны:* $\lambda > 0$.

Тогда ОР ДУ:

$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$

Из ГУ:

$$\begin{cases} y(0) = A = 0, \\ y(l) + y'(l) = A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l - A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

В силу $A = 0$ имеем:

$B\left(\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l\right) = 0.$

Нетривиальные решения будут, только если

$\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0,$

т.е.

$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l = -\sqrt{\lambda}.$

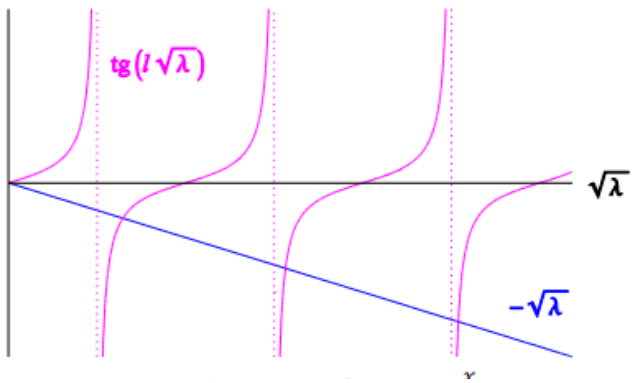
Это трансцендентное уравнение имеет бесконечно много положительных корней λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ (см. рис.). Им соответствуют СФ

$y_n(x) = B\sin\sqrt{\lambda_n}x, \qquad B \neq 0.$

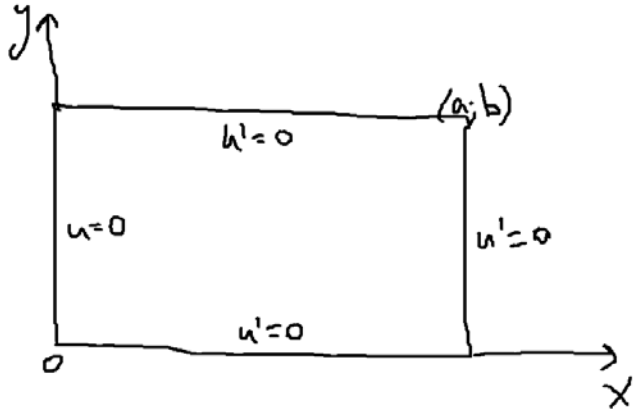
Поскольку СФ *всегда* определены с точностью до ненулевого множителя, мы в дальнейшем будем этот множитель опускать, т.е. выписывать только систему ЛНЗ СФ.

Ответ: $\lambda_n > 0$ — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda}$, $n = 1, 2, \ldots$;

$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x.$



Отметим, что по одной координате может быть косинус, по другой синус, по одной с целым аргументом, по одной с полуцелым – всё решают ГУ. Пример. Пусть ГУ такие



(производная берётся по аргументу, нормальному к стороне).
Тогда СФ будут

$$u_{nm} = \cos\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right), \qquad \text{где } a \in N, b \in N \cup \{0\}$$

А СЗ

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2, \quad \text{где } a \in N, b \in N \cup \{0\}$$

Подобьём итог методички, чтобы всё уложилось в голове!

Решение задачи 2 в прямоугольнике и кирпиче достаточно несложное:

Главная идея – представить функцию многих переменных u как произведение функций одного аргумента: X(x)Y(y)Z(z), что позволяет свести многомерную задачу Штурма-Лиувилля к одномерной.

Решение – СФ u(x,y,z) записывается в виде произведения синусов-косинусов или их комбинаций (в случае ГУ 3 рода) – зависит от координат.

СЗ складывается из сумм СЗ вдоль каждой из осей, например:

$$\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2$$